

Movimiento amortiguado: sobre amortiguado y sub amortiguado

Damped motion: overdamped and underdamped

E. Farías de la Torre ¹, F. Zacco ², G. Guzzo ², S. Bogleione ² y D. Novillo ^{2,*}

¹ Facultad Regional Córdoba (UTN)- Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (UNC).

² Facultad Regional Córdoba (UTN).
Ciudad Universitaria-Córdoba-Argentina.

Recibido: 30/12/2014; aceptado: 19/04/2016

Se propone la mejora de un equipo de dinámica unidimensional incorporando el movimiento amortiguado con fricción viscosa. Se utiliza, a tal fin, un mecanismo que permite una variación continua de la constante de amortiguamiento con lo cual se obtienen valores superiores e inferiores al coeficiente de amortiguamiento crítico. A partir de las mediciones posición tiempo se determina el coeficiente de amortiguamiento para los distintos casos.

Palabras claves: amortiguamiento, viscoso, Coulomb, crítico, sobreamortiguado, subamortiguado

We propose a betterment of an one-dimensional dynamics equipment, adding the damping coefficient with viscous friction. We use a mechanism that allows a continuous variation of the damping constant in order to obtain higher and lower values to the critical damping coefficient. From position-time measurements we determine the damping coefficient for different cases.

Keywords: damping, viscous, Coulomb, critical, overdamped, underdamped.

I. INTRODUCCIÓN

En el Trabajo Práctico de Laboratorio (TPL) que se desarrolla en la asignatura Física I correspondiente a las carreras de Ingeniería y, eventualmente, a la Licenciatura en Física y referido a oscilaciones libres se aboca a la medición del periodo de oscilación y su comparación con el valor esperado teóricamente, haciendo referencia a la fricción seca o de Coulomb ⁽¹⁾ para explicar el decaimiento de amplitudes sucesivas. El TPL así planteado tiene su justificación por el hecho de que, como se analizará en el apartado II, la fricción seca no afecta al periodo y, por ende, a la frecuencia de oscilación natural del sistema. Esta situación no se cumple para el caso de oscilaciones con fricción viscosa (ver III).

Un segundo aspecto a considerar es el referido a la asignatura Mecánica y otras relacionadas con la misma para las cuales el tema de amortiguamiento viscoso reviste particular importancia por su aplicación y por ello consideramos que, una introducción al mismo en la asignatura Física I constituiría un buen aporte a la formación del futuro egresado ⁽²⁾.

Nuestra intención, con el presente Trabajo, es proveer elementos para un completo desarrollo del TPL para el tema en cuestión incorporando, específicamente, la fricción seca y la fricción viscosa. Asimismo y, en relación a esta última, proponemos la instrumentación de un mecanismo que permita variar el coeficiente de amortiguamiento y así obtener los casos de sobreamortiguado y subamortiguado como así también realizar la medición, para cada caso, de la relación entre

el coeficiente de amortiguamiento y el coeficiente de amortiguamiento crítico ⁽²⁾.

II. FRICCIÓN SECA

Ecuaciones básicas

El análisis físico-matemático de la oscilación con fricción seca se realiza a partir de considerar los intervalos de tiempo en los cuales la velocidad, v , no cambia de signo ya que la fuerza debida a la fricción es proporcional a esta magnitud y por esto, al cambiar el sentido de la velocidad cambia el sentido de la fuerza de fricción. Así, para el primer semiperiodo ($0 \leq T_n \leq T_n/2$; $v \leq 0$) se tiene:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \mu g \quad (1)$$

donde, $x(t)$ representa el desplazamiento desde la posición de equilibrio estático; ω_n es la frecuencia natural de oscilación, $\omega_n = 2\pi/T_n$; T_n : periodo; μ : coeficiente de fricción dinámico y, g : aceleración local de la gravedad. Finalmente, debemos recordar la relación: $\omega_n = (k/m)^{0.5}$ donde k : constante de resorte (o resultante del sistema de resortes) y, m : masa del móvil.

Por otra parte, para el segundo semiperiodo, ($T_n/2 \leq T_n$; $v \geq 0$) como para los sucesivos semiperiodos pares, se tiene, como ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = -\mu g \quad (2)$$

Las condiciones iniciales que adoptamos para nuestra experiencia son las más simples de lograr experimentalmente. Así, para el primer semiperiodo:

$$x_1(0) = x_0 \quad (3)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \quad (4)$$

Donde se asume, por simplicidad, que $x_0 > 0$ (ver VI). La solución de (1) con las condiciones (3) y (4) resulta:

$$x_1(t) = \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) \cos \omega_n t + \frac{\mu mg}{k} \quad (5)$$

Por otra parte, para el siguiente semiperiodo las condiciones iniciales son, para $T_n/2$:

$$x_2\left(\frac{T_n}{2}\right) = \left(-x_0 + \frac{2\mu mg}{k}\right) \quad (6)$$

$$\dot{x}_2\left(\frac{T_n}{2}\right) = 0 \quad (7)$$

resultando:

$$x_2(t_1) = \left(-x_0 + \frac{3\mu mg}{k}\right) \cos \omega_n t_1 - \frac{\mu mg}{k} \quad (8)$$

Con $t_1 = t - T_n/2$

La solución para los siguientes semiperiodos debe plantearse eligiendo la ecuación diferencial adecuada conforme al signo que observe la velocidad y, adoptando como condición inicial la amplitud al comienzo del intervalo, considerando nula la velocidad inicial, para todos los casos.

Como se puede deducir de las ecuaciones anteriores, el efecto de la fricción seca atenúa las amplitudes de los máximos y mínimos sucesivos en forma lineal y conforme a la ecuación:

$$X_{(max)i}\left(\frac{t_i}{T_n}\right) = x_0 - \left(\frac{4\mu mg}{k}\right)\left(\frac{t_i}{T_n}\right) \quad (9)$$

para los máximos positivos, con $t_i = 0, T_n, 2T_n, \dots$. Y, por otra parte:

$$X_{(min)i}\left(\frac{t_i}{T_n}\right) = -x_0 + \frac{2\mu mg}{k} + \left(\frac{4\mu mg}{k}\right)\left(\frac{t_i - \frac{T_n}{2}}{T_n}\right) \quad (10)$$

para los mínimos negativos, con $t_i = T_n/2, 3T_n/2, \dots$

Descripción del equipo

En la actualidad conviven dos sistemas físicos para el análisis de los movimientos unidimensionales y, específicamente, para nuestro caso los movimientos oscilatorios. Por una parte los equipos más recientes usan rodamientos de baja fricción⁽³⁾ mientras que otros algo más antiguos emplean la suspensión por aire logrando, estos últimos y como se explicará a continuación, un menor coeficiente de fricción dinámica.

En las figuras 1 y 2 se muestran estos sistemas con sus accesorios.

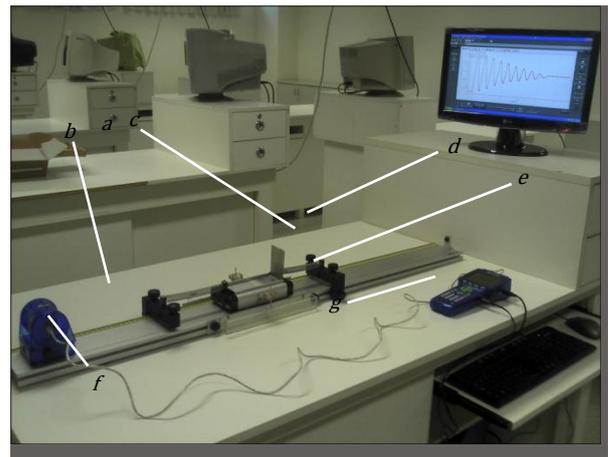


Figura 1: Sistema para el estudio de movimientos unidimensionales usando móviles con rodamientos de baja fricción⁽³⁾: a) móvil; b) pista con ranuras para guía del movimiento; c) resortes; d) puentes de sujeción de los resortes; e) accesorios para fricción viscosa; f) detector de movimiento por ultrasonido; g) interface.

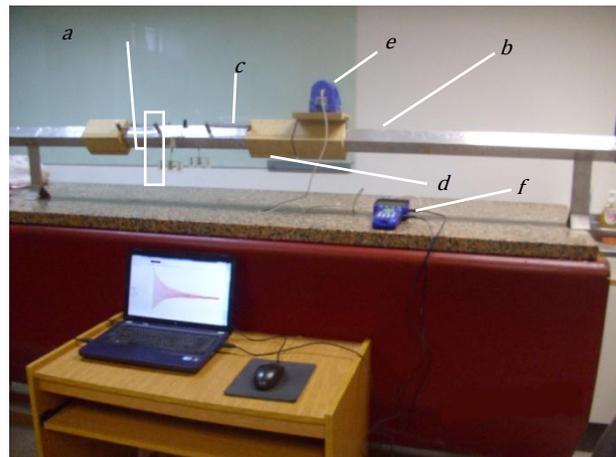


Figura 2: Sistema destinado al estudio de movimientos unidimensionales con suspensión por aire⁽⁴⁾: a) móvil; b) pista con orificios de salida de aire, c) resortes; d) puentes de sujeción para el sistema de resortes; e) sensor de movimientos; f) interface.

Ambos equipos se usan actualmente, no obstante, hay un proceso de reemplazo del segundo por el primero a causa de presentar menos problemas operativos. El sistema de suspensión por aire observa su principal inconveniente en el impulsor de aire el cual, cuando fue concebido, era posible obtener este tipo de elemento pero actualmente no se tiene la misma facilidad. El primer sistema es de mayor simplicidad aunque presenta mayor fricción que el anterior. De todas maneras y, como se analizará en III, la experiencia con fricción viscosa incorpora la corrección por fricción seca y con ello esta diferencia no es determinante en la elección del sistema.

En la figuras 3 y 4 se muestran las funciones desplazamiento para el experimento de oscilación con fricción seca usando los dos sistemas.

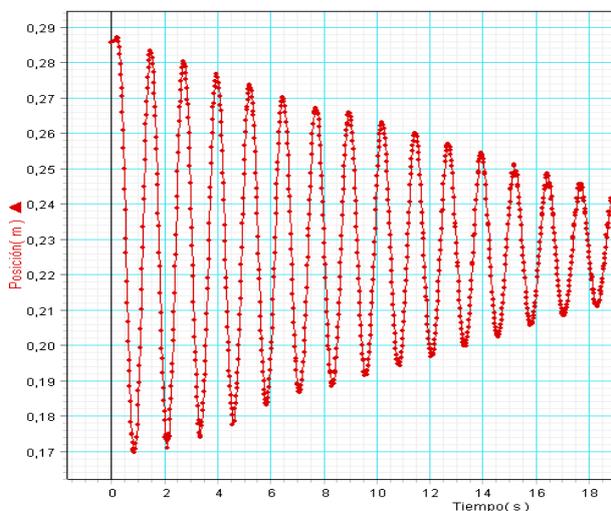


Figura 3: Función desplazamiento versus tiempo para el sistema de la figura 1a. En la escala vertical se grafican los desplazamientos totales. El coeficiente de rozamiento, medido a partir de la ec.9 resulta: 0.07. La aceleración de la gravedad, g , fue medida con el método del péndulo resultando, $g=9.88 \text{ m/s}^2$.

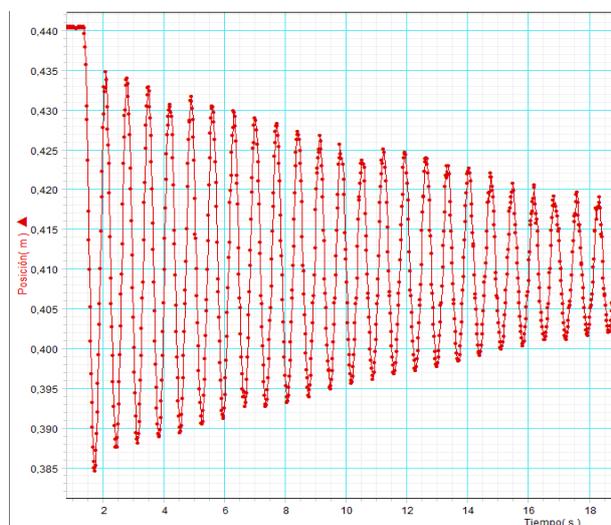


Figura 4: Función desplazamiento versus tiempo para el sistema de suspensión por aire. El periodo de la

oscilación libre resulta, $T_n=0.7 \text{ s}$. y, el coeficiente de rozamiento, medido a partir de la ec.9 resulta: 0.00175.

III. FRICCIÓN SECA Y VISCOSA

Puesto que no se puede desligar de la fricción seca plantearemos la solución de la experiencia con amortiguamiento seco y viscoso. La forma de abordar este tema es similar a lo desarrollado en el punto II pero considerando, esta vez, para la definición de los subintervalos (según el signo de las velocidades) las soluciones para el amortiguamiento viscoso en vez de las correspondientes a la oscilación libre. Las respectivas ecuaciones diferenciales para estos casos son^(1,2):

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \mu g \quad (11)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\mu g \quad (12)$$

Correspondiendo la ec.11 al primer semiperiodo de la componente armónica de la solución: $0 \leq t \leq T_d/2$ y, $v \leq 0$. Mientras que la ec.12 se aplica al segundo semiperiodo: $T_d/2 \leq t \leq T_d$ y, $v \geq 0$ (ver caso subamortiguado).

La ecuación característica de la solución homogénea tiene por raíces:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\omega_n \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_c^2}} \quad (13)$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \omega_n \sqrt{\frac{c^2}{c_c^2} - 1} \quad (14)$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2m} \quad (15)$$

Correspondiendo el primer caso al subamortiguado; el segundo al sobreamortiguado y, el tercero al caso crítico.

El primero presenta, durante el desarrollo del movimiento cambios de signo de la velocidad y por lo tanto es necesario emplear la ec.11 o la ec.12 según el signo de la velocidad y subdividir los intervalos en semiperiodos. Los dos restantes casos tienen velocidad negativa y por lo tanto solo se utiliza la ec.11.

Caso subamortiguado

Para el primer semiperiodo se adoptan las mismas condiciones iniciales de II y por idénticas razones. Con esto se obtiene para los dos primeros semiperiodos:

$$x_1(t) = \left(x_0 - \frac{\mu m g}{k}\right) e^{-\frac{c}{2m}t} \{ \cos \omega_a t \} \text{ ó } + \frac{c}{2m\omega_a} \sin(\omega_a t) \} + \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k} \quad (16)$$

$$x_2(t_1) = \left(-x_0 + \frac{3\mu mg}{k}\right)e^{-\frac{c}{2m}t_1} \left\{ \cos(\omega_a t_1) + \frac{c}{2m\omega_a} \sin(\omega_a t_1) \right\} - \frac{\mu mg}{k} \quad (17)$$

donde:

$$t_1 = t - T_a/2$$

c : coeficiente de amortiguamiento.

c_c : coeficiente crítico de amortiguamiento.

$$c_c = 2(mk)^{0.5}$$

ω_a : frecuencia de la componente periódica de la amortiguada.

$$\omega_a = \omega_n (1 - c^2/c_c^2)^{0.5}$$

T_a : periodo de la componente periódica.

$$T_a = 2\pi/\omega_a \text{ ó } T_a = T_n / (1 - c^2/c_c^2)^{0.5}$$

Siendo, para este caso, $c/c_c < 1$.

Conviene precisar que, cuando nos referimos a componente periódica lo hacemos indicando la parte armónica de la solución y que está encerrada entre llaves en la ec.16 y ec.17 toda vez que la solución completa no es una función periódica pero contiene este factor periódico.

Caso sobreamortiguado

Para este caso, la solución resulta como suma de dos exponenciales reales de decaimiento:

$$x(t) = \frac{\left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right)}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \left\{ \alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t} \right\} + \frac{\mu mg}{k} \quad (18)$$

donde, $\alpha_{1,2}$ están dadas por la ec.14 y, $c/c_c > 1$.

Caso de amortiguamiento crítico

Para este caso $c/c_c = 1$ y se tiene por solución:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) e^{-\frac{c}{2m}t} \left(1 + \frac{c}{2m}t\right) + \frac{\mu mg}{k} \quad (19)$$

Este caso no será analizado experimentalmente por las razones que se explican en IV.

IV. REALIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA.

La realización de la experiencia abarca los casos subamortiguado y sobreamortiguado no así el caso de amortiguamiento crítico. En efecto, si bien nuestro equipo permite una variación del coeficiente de amortiguamiento suficiente para efectuar las mediciones de los dos primeros casos y, por tanto, la transición de un caso al otro, esta variación por el momento no es lo suficientemente suave para medir el amortiguamiento crítico.

El sistema utilizado es el de suspensión por aire presentado en II (Descripción del equipo). La detección de posiciones se realiza por el sensor de ultrasonido el cual trabaja a con una frecuencia de muestreo de 50 Hz.

El conjunto de resortes está constituido por cuatro resortes iguales y dispuestos dos a cada lado del móvil con el fin de lograr la estabilidad del mismo. Por otra parte, este último tiene adosado a ambos lados un sistema de tres paletas fijas las cuales, al ser sumergidas en aceite, determinan un amortiguamiento viscoso. Con este fin y, para el alojamiento del aceite se usaron dos cubetas cuyas dimensiones (iguales para ambas) eran de $8cm \times 15cm \times 100cm$. El aceite utilizado fue de transmisión y de grado 140.

La realización de la experiencia supone los siguientes pasos:

IV-1) Experiencia con fricción seca solamente: El sistema completo se hace oscilar sin inmersión de las paletas en aceite. La condición inicial, x_0 , debe ser medida con la mayor exactitud posible pues en la determinación de la relación c/c_c es necesaria esta condición por la aplicación del método de cuadrados mínimos. Se mide la posición del móvil con el detector de ultrasonido y a una frecuencia de muestreo de 50 Hz. Esta experiencia permite calcular la frecuencia natural de oscilación.

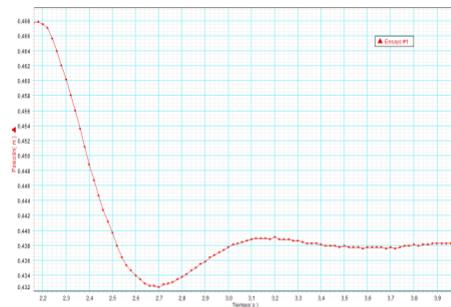
IV-2) Experiencia con fricción seca y viscosa: Se procede a sumergir las paletas y a repetir la operación con las mismas condiciones iniciales:

a) Para paletas parcialmente sumergidas se logra un movimiento oscilatorio subamortiguado. Una mayor inmersión de las paletas determina la aplicación de un coeficiente de fricción c/c_c de más alto valor.

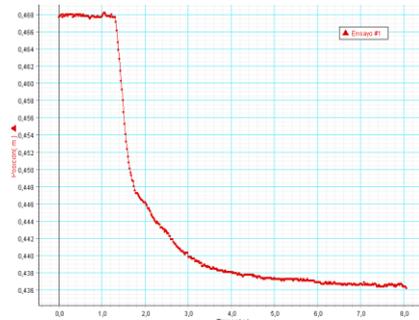
b) Para una inmersión completa de las paletas se obtiene el caso sobreamortiguado.

V. RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5:



(a)



(b)

Figura 5: Gráfica experimental del caso subamortiguado (a) y sobreamortiguado (b).

Se presentan las gráficas de posición-tiempo obtenidas para la fricción seca y viscosa de los casos subamortiguado (5a) y sobreamortiguado (5b). Se utilizan, asimismo, los resultados de fricción seca (figura 1b), obteniéndose para T_n : 0.7s y para μ : 0.00175 (ec.9).

VI. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para el análisis de los resultados obtenidos se restringe a las mediciones realizadas durante el primer semiperiodo, $0 \leq t \leq T_d/2$, para el caso subamortiguado e igual intervalo de tiempo para el sobreamortiguado y por las razones que se explican en párrafo subsiguiente. Por ello las ecuaciones que se utilizan para el tratamiento de los datos son las ec.16 y 18. Las citadas ecuaciones presentan varios parámetros: El desplazamiento inicial, x_0 ; el periodo de la oscilación libre, T_n , medido en la experiencia con fricción seca; la pendiente de caída de los amplitudes, $p=4\mu mg/k$ y, finalmente, la relación c/c_c la cual es de nuestro interés determinar. Por otra parte, la masa y la constante del resorte intervienen bajo la forma de T_n , que ya ha sido considerada.

En este punto conviene analizar la estructura del factor exponencial de la ec.16 a fin de observar que la masa no aparece como parámetro independiente sino que el factor en cuestión puede expresarse en función de c/c_c y T_n . En efecto, observando el exponente vemos que puede ser escrito en forma equivalente:

$$\frac{c}{2m} = 2\pi \frac{c}{c_c} \frac{1}{T_n} \quad (20)$$

Por otra parte, en las ec.16 y 17 el factor $c/2m\omega_a$ puede expresarse:

$$\frac{c}{2m\omega_a} = \frac{\frac{c}{c_c}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_c^2}}} \quad (21)$$

Por lo tanto se confirma que la función $x(t)$ depende sólo de los parámetros mencionados en párrafo anterior.

Por otra parte se tiene que los parámetros intervinientes han sido medidos de la siguiente forma: el desplazamiento inicial se midió manteniendo el mismo algunos instantes después de activar la detección de posiciones por ultrasonido. Se determinó la recta de regresión (en este caso, con pendiente nula) para ese intervalo de tiempo y con ello el valor del parámetro x_0 y su correspondiente error. Los restantes parámetros T_n y p fueron determinados, con sus errores, a partir del experimento con fricción seca. Los resultados obtenidos para los parámetros resultaron:

$$x_0 = (0.4677 \pm 0.0004) \text{ m}$$

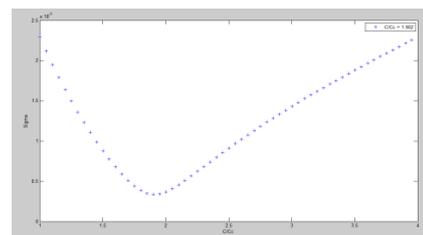
$$T_n = (0.7 \pm 0.02) \text{ s}$$

$$p = (0.00100 \pm 0.00002) \text{ m/s}$$

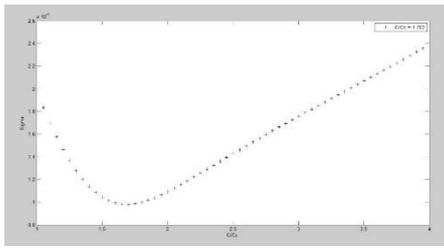
Finalmente, para determinar el parámetro c/c_c se aplicó el método de cuadrados mínimos de la siguiente forma:

En un primer paso se adopta como valor de los tres primeros parámetros el correspondiente a sus respectivos valores medios: $x_0=0.4677 \text{ m}$; $T_n=0.7 \text{ s}$ y $p=0.00100 \text{ m/s}$ procediéndose así:

- A) Nos restringimos al intervalo de tiempo $0 \leq t \leq Ta/2$ para definir la función $x(t)$ que se utilizará para el ajuste en el subamortiguado. No se emplean las funciones correspondientes a sucesivos subintervalos debido a que para ellas existe algún "efecto rebote" del fluido en los extremos del recipiente. Por esta razón y, a fin de minimizar este efecto, se lo diseñó relativamente largo (ver IV).
- Por otra parte, se adopta el mismo intervalo de tiempo para el sobreamortiguado.
- B) Usando la expresión matemática de $x(t)$ y con los valores de los parámetros asumidos se define el intervalo de valores de c/c_c para los cuales y para cada instante de tiempo el dato se encuentra entre los valores teóricos.
- C) Para cada c/c_c del intervalo anterior se calcula el error cuadrático medio y se encuentra el valor de c/c_c que lo minimiza. En las figuras 6a y 6b se muestran las gráficas del error cuadrático medio como función de c/c_c y la determinación de su mínimo.



(a)



(b)

Figura 6: dispersión como función de la relación c/c_c para, a) subamortiguado y, b) sobreamortiguado.

Como resultado del análisis anterior se obtiene:

caso sobreamortiguado:

$$c/c_c = 1.70$$

caso subamortiguado:

$$c/c_c = 0.68$$

En un segundo paso se utilizan los tres parámetros con sus respectivos errores. Se obtienen un conjunto de 26 nuevas ternas de valores procediéndose a repetir las operaciones A, B y C determinando, así, distintos c/c_c que minimizan el error cuadrático medio los cuales resultan próximos entre sí. Los valores obtenidos en las dos etapas (un total de 27 ternas de valores) son promediados para ambos casos: sobreamortiguado y subamortiguado obteniéndose resultados próximos a los hallados en la primera etapa:

$$c/c_c = 1.70 \pm 0.06 \text{ (Sobreamortiguado)}$$

$$c/c_c = 0.70 \pm 0.02 \text{ (Subamortiguado)}$$

Con los errores relativos de 3.5% y 2.8% respectivamente.

Es importante observar que el primer cálculo realizado con los valores centrales de los parámetros tuvo por objetivo comparar cuanto se aparta el valor encontrado para c/c_c del correspondiente al caso en que se consideran los tres primeros parámetros con sus respectivos errores.

VII. CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente Trabajo pueden resumirse en los siguientes puntos:

a) Se aportan elementos que permiten mejorar y ampliar los alcances de los TPL en la asignatura Física y referida al tema de oscilaciones. Por otra parte y, en relación al currículo de carreras como ingeniería mecánica aporta elementos para un TPL introductorio al tema de oscilaciones con fricción viscosa.

b) El tratamiento de los datos experimentales, con su ajuste por cuadrados mínimos y la determinación de la relación c/c_c amplía la visión del alumno en relación al empleo de este método.

c) La simplicidad del sistema mecánico utilizado para lograr el amortiguamiento viscoso y en base a un cierto número de paletas fijas a ambos lados del móvil sugiere, a los fines de obtener valores de c/c_c próximos a uno, introducir paletas giratorias las cuales al variar el ángulo de ataque al fluido permitan variar más suavemente el coeficiente de amortiguamiento.

d) La mayor masa del móvil del sistema con rodamiento en relación al de suspensión por aire determina una mayor dificultad del primero para lograr el caso sobreamortiguado. Este no es un problema menor ya que, por nuestra parte, debimos usar, para el caso de suspensión por aire, un aceite de los más pesados disponibles e incorporar tres paletas a ambos lados del móvil. Para nuestro caso, las respectivas masas de los móviles con rodamientos y de suspensión por aire son: 606 gr y 238 gr lo cual arroja una relación entre los dos amortiguamientos críticos de 1.60, o sea prácticamente un 60% mayor del primero en relación al segundo.

VIII. REFERENCIAS

- 1-Steidel (Jr), R. F. *Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas*, CECSA, México (1981).
- 2- Beer, F. P. Johnston, E. R. *Mecánica Vectorial para ingenieros* VI Ed. Mc. Graw Hill, México (2010).
- 3- Pasco, *Physics & Engineering Education* (2010).
- 4- Leybold, *Leybold Didactic* GMBH (2007).